Title	正規論理とそのmodelについて(計算機構に関する数学的基礎理論とその応用)
Author(s)	坂井, 公
Citation	数理解析研究所講究録 (1983), 494: 215-222
Issue Date	1983-06
URL	http://hdl.handle.net/2433/103563
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

数理解析研究所講究録
第 494 巻 1983 年 215-222

正規論理とそのmodel について

新世代コンピュータ技術開発機構(ICOT) 坂井 公 (Ko Sakai)

概要

一階述語論理の項概念を正規項にまで拡張した正規論理を定義し，そのmodel として正規F-magmaを導入し，導出原理の完全性を示す.

1．序論

一階述語論理とそのmodel については，多くの研究があり，数々の興味深い事実が知られている．また，通常の古典論理とは異なるものとして，直観主義論理や，様相論理があり，これらは古典論理の論理記号の解釈を変えたり，必然性，可能性といった様相概念を導入したりした結果である．これらの比較的新しい論理体系がそれぞれ明確なmodel を持つこともよく知られている.

一方，一階述語論理を応用する立場から見たとき重要な研究にRobinsonの導出原理がある．効率的な推論方式を提供している導出原理の果してきた役割はきわめて大きく，人工知能などの研究を行なっていく上で欠かせない知識となっており，多少制限された形ではあるが，実際にそれを応用したものとして，program 言語Prologが知られている.

さて，導出原理を適用していく上で中心的役割を担うのが，項の統合化であるが，この統合化の条件を多少ゆるくすることにより（具体的にはoccur check を省略する），別の統合化algorithm が得られる. [2,4,5]

上記のような変更を統合化algorithm に加えれば，古典論理とは異なる式が証明されるのは当然であるが，これを正規論理として特徴ずけ，そのmodel を与えるのが本稿の目的である.

2．項

古典論理と後に定義する正規論理との差は項概念だけである．以下に有限項と正規項とを定義するが，古典論理は項として有限項だけを，正規論理は正規項をも認めた体系である.

定義．ranked alphabet

ranked alphabet とは，つぎのような組（F，ρ）をいう．

(1) Fは任意の集合．
(2) ρはFから自然数の集合$\mathbb{N}$への関数．

直感的にはFは関数記号の集合で，ρはそのarity である．特に必要がないかぎり，ranked alphabet というときρは省略して単にFという．又，$\{f \in F : \rho(f) = n\}$をFn と書く．Fn はarity nの関数記号の集合である．

定義．項

Fをranked alphabet ，Xを変数記号の集合とする．F上の項とは次のような性質を持つ$\mathbb{N}^*$からF$\cup$Xへの部分関数tである．（$\mathbb{N}^*$は自然数の有限列の集合）

(1) tの定義域$\underline{\mathrm{Dom}}(t)$はprefex-closed,つまり任意の$\alpha$，$\beta \in \mathbb{N}^*$に対して，$\alpha\beta \in \underline{\mathrm{Dom}}(t)$ならば，$\alpha \in \underline{\mathrm{Dom}}(t)$である．（$\alpha\beta$は2つの有限列$\alpha$，$\beta$の結合を表わす）
(2) $\underline{\mathrm{Dom}}(t) \neq \phi$．
(3) $\alpha \in \mathbb{N}^*$，i，$j \in \mathbb{N}$，$i \leq j$，$\alpha j \in \underline{\mathrm{Dom}}(t)$ならば，$\alpha i \in \underline{\mathrm{Dom}}(t)$．
(4) $t(\alpha) = f \in F_k$ならば，任意の$i \in \mathbb{N}$に対して，$1 \leq i \leq k$であるとき，かつ，そのときに限り$\alpha i \in \underline{\mathrm{Dom}}(t)$である．（この場合，Xの元すなわち変数は，$F_0$ の元つまりarity 0の関数記号と同等に扱う）

項を直感的に述べれば，木（無限木でもよい）の各節点にarity が矛盾しないように関数記号，変数記号を貼りつけたものである．

定義．有限項

項tが有限であるとは，tの定義域$\underline{\mathrm{Dom}}(t)$が有限集合であることである．

通常，よく用いられる（有限）項の定義は，帰納的なものであるが，上の有限項の定義がそれと同等なものであることは，明らかであろう．

定義．部分項

項tの$\alpha \in \underline{\mathrm{Dom}}(t)$における部分項$t/\alpha$とは，次のように定義される．

$$t/\alpha(\beta) = t(\alpha\beta).$$

定義．正規項

項tが正規であるとは，tの部分項の集合，すなわち$\{t/\alpha : \alpha \in \underline{\mathrm{Dom}}(t)\}$が有限集合であることである．

定義により，明らかに有限集合は正規項である．

項の厳密な定義は上述のものとするが，それらを表現する場合には，通常の項表現に繰り返しの意味で「...」を援用したものを使う．

3．正規述語論理

通常の一階の述語論理の項は有限項であるが，これを正規項にまで拡張した論理を正規（述語）論理と呼ぶ．有限項が正規項であることから，従来の公理系での証明はそのまま正規論理での証明になる．これは正規論理が古典論理より弱くないことを意味する．しかし，有限項のみを用いる式に限っても逆は成りたたない．

例．正規LKによる証明図

$$\dfrac{\dfrac{P(f(f(\ldots)),\ f(f(\ldots))) \rightarrow P(f(f(\ldots)),\ f(f(\ldots)))}{\forall x\ P(x,x) \rightarrow P(f(f(\ldots)),\ f(f(\ldots)))}\ \forall\text{－左}}{\forall x\ P(x,x) \rightarrow\ \exists\ P(f(y),y)}\ \exists\text{－右}$$

上図の最下段の式は古典論理でも意味を持つが，証明はできない．

4．正規F－magma

前節で正規論理が古典論理より強いことを示したが，本節では正規論理に対するmodel を導入する．

まず，Courcell[3] に沿ってF－magma を定義する．

定義．F－magma(F－algebra とも言う)

ranked alphabet Fが与えられたとき，集合AがF－magma であるとは任意の $f \in Fn$ に対してA上の n－ary 関数 $\hat{f}$ が定義されていることを言う．

F－magma に関しては次のようなことがよく知られている．

(1) F－magma の全体はcategoryを作る．
(2) 古典一階述語論理のHarbrand空間（変数を含まない有限項の集合）は上のcategory内でintial objectになる．

F－magma は，古典論理のmodel であるが，F－magma に制限を加えることによって正規論理のmodel を作ることができる．これが正規F－magma である．

まず正規（方程式）系とその解という概念を導入しよう．

定義．正規方程式系（又は単に正規系と呼ぶ）

Fをranked alphabet とする．正規方程式系とは，次のような系 $< v1=t1,.., vn=tn >$ である．各 $v1,...,vn$ は，相異なる変数であり，$t1,...,tn$ は，

$$ti = fi(xi1,...,xik)$$

の形の項である．ここで $fi \in Fk$，各 $xi1,...,xik$ は変数である．
さらに，右辺に出てくる変数 xij が全て左辺に出てくる $v1,...,vn$ のいずれかであるならば正規系は閉じているという．

定義．正規系の解

$S=< x1=t1,...,xn=tn >$ を正規系，AをF－magma とするときSのAでの解を次の様に定義する．

Sの等式の右辺にのみ現れるすべての変数を $v1,...,vm$ とし，$\phi1,...,\phi n$ をA上のm-ary関数であるとする．このとき $< x1=\phi1,...,xn=\phi n >$ がSの解であるとは，S内に現れる各 $f \in F$ を $\hat{f}$

と解釈するとき，任意のAの元a1,...,am に対してSの各vj にaj を代入し，各xi に ϕi(a1,...,am)を代入すれば，等号が常に成立することである．

定義．正規F－magma

F-magma Aが正規であるとは，任意の正規系が，Aで唯一の解をもつことである．

正規F－magma のAを正規論理のmodel にするには論理式中に現れる正規項にAの元（又は正規項が変数を含んでいればA上の関数）による解釈を与えなければならないが，正規項は，必ず正規系の解の形に直せるし(Courcelle[1])，上の定義によりその正規系の一意解の存在が保証されているのでその解をもって正規項の解釈とする．論理式中の他の要素，つまり変数，述語記号，論理記号の解釈は古典論理と同じである．

上の議論で一つの正規項に対する正規系が一つと限らないことから，解釈の曖昧さが生ずるような印象を受けるが，これは次節の定理と証明を見れば，杞憂であることが分かる．

5．　導出原理の完全性

本節では，正規項を用いた統合化algorithm による導出原理が，前節で導入した正規F－magma model に対して完全であることを示す．

まず，古典論理の場合における導出原理が完全であるための背景となっている事実を，Chan & Lee[1] に沿って振り返ってみると次のようになる。

(1) 標準形への変換
- 積和標準形と和積標準形
- 冠頭標準形
- Skolem標準形

(2) Herbrand空間とHerbrand解釈

(3) 完全な意味の木とHerbrandの定理

(4) 統合化algorithm

上に並べた事実について，再吟味する．

まず(1) であるが，これらは論理記号⊃，∧，∨，¬，∃，∀の解釈から導かれる事実であり，model 内の代数構造にはかかわらない．したがってmodel を正規F－magma にしても成立する．

(2) は，本質的部分であり，詳細なcheck を必要とする．

(3) であるが，完全な意味の木の存在はHerbrand空間の可算性にもとずいているので，その部分に反省が必要である．Herbrandの定理は完全な意味の木の存在とKonig のLemma より得られる．

(4) 統合化algorithm の存在については[2,4,5] を参照されたい．

以上の再吟味により，新しい導出原理の完全性は(2) と(3) にかかっているといえる．

まずHerbrand空間の拡張から始めよう．これは古典論理でのHerbrand空間を，正規項を要素として許すように拡張すればよい．拡張されたHerbrand空間は，正規F－magma になる（Courcelle[1]）．またこの空間は確かに可算であるから(3) についても全く問題がないことが確認された．

最後に残ったのがHerbrand解釈であるが，これで重要なのは，「全てのHerbrand解釈で充足不可能な式は，全てのmodel で充足不可能である」という点であり，それは，古典論理の場合，４節で述べたF-magmaに関する (1),(2)の事実に基ずいているが，正規論理の場合も，次の同様な定理から導かれる．

定理

正規F-magmaの全体は正規系の解を保存するhomomorphismをmorphismとしてcategoryを成し，その中で拡張されたHerbrand空間（Ｈ［Ｆ］と書く）はintial objectである．

証明

定理の前半は明らかである．

H[F]がこのcategoryに属することも，上述の通りである．

H[F]がintialであることを示す為に，Ａを任意の正規Ｆ-magmaとする．閉じた正規系ＳのＡでの解を$\underline{\mathrm{solu}}_{A}$ (S) と書くことにして，H[F]からＡへの写像$\underline{\mathrm{eval}}_{A}$ を次のように定義する．$r \in H[F]$に対し，閉じた正規系$S = <x = t, \ldots>$が存在して$\underline{\mathrm{solu}}_{H[F]}(S) = <x = r, \ldots>$となっていると考えてよい．$\underline{\mathrm{solu}}_{A}(S) = <x = a, \ldots>$となるａを使って$\underline{\mathrm{eval}}_{A}(r) = a$と定義する．

まず，$\underline{\mathrm{eval}}_{A}$ がwell-defenedであることを示そう．２つの正規系Ｓ，Ｓ' があって$\underline{\mathrm{solu}}_{H[F]}(S) = <x = r, \ldots>$，$\underline{\mathrm{solu}}_{H[F]}(S') = <x' = r', \ldots>$となる場合に，上の定義が曖昧にならないためには，$\underline{\mathrm{solu}}_{A}(S) = <x = a, \ldots>$，$\underline{\mathrm{solu}}_{A}(S') = <x' = a', \ldots>$としたとき，$a = a'$ でなければならないので，これを示す．

$$S = <x_1 = t_1, \ldots, x_n = t_n>,$$

$S' = \langle x'_1 = t'_1, \ldots, x'_{n'} = t'_{n'} \rangle$,

$\underline{solu}_{H[F]}(S) = \langle x_1 = r_1, \ldots, x_n = r_n \rangle$,

$\underline{solu}_{H[F]}(S') = \langle x'_1 = r'_1, \ldots, x'_{n'} = r'_{n'} \rangle$とする.

新たに変数 $\{z_{ij} : i=1, \ldots, n,\ j=1, \ldots, n'\}$ を導入して, 次の手順により新たな正規系S''を作る.

(1) $u_1 = f(x_{l_1}, \ldots, x_{l_k})$,

$u'_1 = f'(x'_{l'_1}, \ldots, x'_{l'_{k'}})$ とすれば,

$r_1 = r'_1 = r$であるから, $f = f'$ かつ $r_{l_i} = r'_{l'_i}$, $(i=1, \ldots, k(=k'))$.

そこでS''の最初の等式を$z_{11} = f(z_{l_1 l'_1}, \ldots, z_{l_k l'_{k'}})$ とする.

(2) $k=0$または, $z_{l_1 l'_1} = \ldots = z_{l_k l'_{k'}} = z_{11}$ならば, 終了.

z_{11}以外の変数z_{ij}があるとし,

$u_i = g(x_{l_1}, \ldots, x_{l_m})$,

$u'_j = g'(x'_{l'_1}, \ldots, x'_{l'_{m'}})$ とすれば,

$r_i = r'_j = r$であるから, $g = g'$ かつ $r_{l_i} = r'_{l'_i}$, $(i=1, \ldots, m(=m'))$.

このときS''の次の等式を$z_{ij} = g(z_{l_1 l'_1}, \ldots, z_{l_m l'_{m'}})$ とする.

(3) 以下 (2) の過程を新たなz_{ij}が出現しなくなるまで続ける.

さて, こうしてできた正規系を

$S'' = \langle z_{i_1 j_1} = t_1, \ldots, z_{i_{n''} j_{n''}} = t_{n''} \rangle$,

さらに,

$\underline{solu}_A(S) = \langle x_1 = a_1, \ldots, x_n = a_n \rangle$,

$\underline{solu}_A(S') = \langle x'_1 = a'_1, \ldots, x'_{n'} = a'_{n'} \rangle$

とすると

$\langle z_{i_1 j_1} = a_{i_1}, \ldots, z_{i_{n''} j_{n''}} = a_{i_{n''}} \rangle$,

$\langle z_{i_1 j_1} = a'_{j_1}, \ldots, z_{i_{n''} j_{n''}} = a'_{j_{n''}} \rangle$は,

S''の作りかたから, ともにS''の解である. よって解の一意性から, $a_{i_1} = a'_{j_1}$.

ところで $i_1 = j_1 = 1$であるから, $a = a_1 = a_{i_1} = a'_{j_1} = a'_1 = a'$ が導かれる.

また定義より$\underline{eval}_A$ が正規系の解を保存することはあきらか.

次に$\underline{eval}_A$ がhomomonphsm であることを示す. すなわち$f \in F_n, r_1, \ldots, r_n \in H[F]$のとき

$\underline{eval}_A(f(r_1, \ldots, r_n)) = \hat{f}(\underline{eval}_A(r_1), \ldots, \underline{eval}_A(r_n))$ が

成りたつことを言う. 仮定より, $\langle x_1 = r_1, \ldots \rangle, \ldots, \langle x_n = r_n, \ldots \rangle$をそれぞれ解とする正規系$S_1, \ldots, S_n$ が存在する. 各S_i は共通の変数を持たないとしてもよい. 新しい変数zを導入し$S = \langle z = f(x_1, \ldots, x_n), S_1, \ldots, S_n \rangle$とする. そのとき仮定から,

$\underline{solu}_{H[F]}(S) = \langle z = f(r_1, \ldots, r_n), \underline{solu}_{H[F]}(S_1), \ldots, \underline{solu}_{H[F]}(S_n) \rangle$,

$$\underline{solu}_A(S) = \langle z = \hat{f}(\underline{eval}_A(r1), \ldots, \underline{eval}_A(rn)), \underline{solu}_A(S1), \ldots, \underline{solu}_A(Sn) \rangle$$

である．よって，

$$\underline{eval}_A(f(r1, \ldots, rn)) = \hat{f}(\underline{eval}_A(r1), \ldots, \underline{eval}_A(rn))$$

が成りたつ．

最後にH[F]からAへの，正規系の解を保存するhomomorphismが$\underline{eval}_A$以外にないことは，解の一意性および$\underline{eval}_A$の定義から明らかである．□

参考文献

1. Chang, C.L. and Lee, C.R. Symbolic Logic and Mechanical Theorem Proving.Academic Press, New York, 1973.

2. Colmerauer, A. "Prolog and infinite trees," Logic Programming, Academic Press, 1982.

3. Courcelle, B. "Foundation of infinite trees," Theoretical Foundation of Programming Methodology, D. Riedel, 1982.

4. Morris, F.L. "On list stractures and their use in the programming ofunification," Research Report 4-78, School of Computer and Information Science, Syracuse University, 1978

5. Mukai, K. "A unification algorithm for infinite trees," WGSYM, IPSJ,held on Feb. 14, 1983 (to appear)